Raccoglimento a fattor comune

Se tutti i termini di un polinomio hanno un fattore comune, si può scrivere il polinomio sotto forma di un prodotto di due fattori, di cui uno è il fattore comune e l'altro è la somma algebrica dei quozienti di ciascun termine per il fattore comune.

Questa operazione si chiama "raccogliere a fattor comune", oppure "mettere in evidenza un fattore".Generalmente il fattore messo in evidenza è l'M.C.D. dei termini del polinomio.Esempio:

$$am + bm + cm = m \cdot (a + b + c)$$

Altro esempio:

$$9a^3b^2 + 12a^2b^3 - 6a^2b^2c = 3a^2b^2 \cdot (3a + 4b - 2c)$$

Divisione fra polinomi

Se indichiamo con A e B due polinomi ordinati rispetto ad una stessa lettera, ed A è di grado uguale o maggiore di B, rispetto a quella lettera, si può dimostrare che esistono sempre e sono unici, due polinomi, ordinati rispetto alla stessa lettera, Q ed R, per i quali vale la relazione:

$$A = B \cdot Q + R$$

Il grado di Q è uguale alla differenza fra il grado di A e quello di B, ed R ha grado minore di B. Nella divisione del polinomio ordinato A per il polinomio ordinato B, Q è il quoziente ed R il resto. R può anche essere 0. In questo caso la relazione precedente diventa:

$$A = B \cdot Q$$

Cioè Q è il quoziente esatto fra A e B, od anche, A è divisibile per B.
Sia da eseguire la divisione seguente:

$$(6a^4 - 11a^3 + 4a^2 - 5a - 2) : (2a^2 - 3a - 1)$$

1)Si ordinano i due polinomi secondo le potenze decrescenti di una stessa lettera (e si dispone poi l'operazione come indica nell'esempio):

$$\begin{array}{l|l}
6a^4-11a^3+4a^2-5a-2 & 2a^2-3a-1 \\ \cline{2-2}
 & \\
\end{array}$$

2)Si divide il primo termine del dividendo per il primo termine del divisore e il quoziente è il primo termine del polinomio quoziente.

$$\begin{array}{l|l}
6a^4-11a^3+4a^2-5a-2 & 2a^2-3a-1 \\ \cline{2-2}
 & 3a^2 \\
\end{array}$$

3)Si moltiplica il primo quoziente per ciascun termine del divisore e si sottrae dal dividendo il polinomio prodotto (per far questo si scrivono i singoli termini del prodotto col segno cambiato sotto i termini simili del dividendo e poi si addizionano questi). Si ottiene così un polinomio che è il primo resto parziale.

$$\begin{array}{r|l}
6a^4-11a^3+4a^2-5a-2 & 2a^2-3a-1 \\ \cline{2-2}
-6a^4+9a^3+3a^2 & 3a^2 \\ \hline
=-2a^3+7a^2-5a-2 &
\end{array}$$

4)Si divide il primo termine di questo resto parziale per il primo termine del divisore e si ottiene così il secondo termine del quoziente.

$$\begin{array}{r|l}
6a^4-11a^3+4a^2-5a-2 & 2a^2-3a-1 \\ \cline{2-2}
-6a^4+9a^3+3a^2 & 3a^2-a \\ \hline
=-2a^3+7a^2-5a-2 &
\end{array}$$

5)Si moltiplica questo secondo termine del quoziente per ciascun termine del divisore e si sottrae il polinomio prodotto dal primo resto parziale. Cos□ si ottiene il secondo resto parziale.

$$\begin{array}{r|l}
6a^4-11a^3+4a^2-5a-2 & 2a^2-3a-1 \\ \cline{2-2}
-6a^4+9a^3+3a^2 & 3a^2-a \\ \hline
=-2a^3+7a^2-5a-2 & \\
+2a^3-3a^2-a & \\ \hline
=4a^2-6a-2 &
\end{array}$$

6)Si divide il primo termine del secondo resto parziale per il primo termine del divisore e si ottiene il terzo termine del quoziente.

$$\begin{array}{r|l}
6a^4-11a^3+4a^2-5a-2 & 2a^2-3a-1 \\ \cline{2-2}
-6a^4+9a^3+3a^2 & 3a^2-a+2 \\ \hline
=-2a^3+7a^2-5a-2 & \\
+2a^3-3a^2-a & \\ \hline
=4a^2-6a-2 &
\end{array}$$

7)Si moltiplica il terzo termine del quoziente per ciascun termine del divisore,si sottrae il polinomio prodotto dal secondo resto parziale e si ottiene il terzo resto parziale. Qui si ottiene 0.

$$
\begin{array}{r|l}
6a^4-11a^3+4a^2-5a-2 & 2a^2-3a-1 \\ \cline{2-2}
-6a^4+9a^3+3a^2 & 3a^2-a+2 \\ \cline{1-1}
=-2a^3+7a^2-5a-2 & \\
+2a^3-3a^2-a & \\ \cline{1-1}
=\ 4a^2-6a-2 & \\
-4a^2+6a+2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

La Regola di Ruffini

Dato un polinomio di grado n, ordinato secondo potenze decrescenti di x, indicato A(x); lo si debba dividere per un <u>binomio</u> B(x) del tipo (x-c) o (x+c).
Il polinomio quoziente Q(x) sarà di grado n-1 rispetto ad x e i suoi coefficienti potranno calcolarsi col seguente procedimento:

a) Il 1° coefficiente del quoziente Q(x) è uguale al 1° coefficiente del dividendo A(x).
b) Ciascuno dei successivi coefficienti di Q(x) si ottiene moltiplicando il coefficiente precedente per c (o per –c) e addizionando il prodotto ottenuto al coefficiente di A(x), che occupa lo stesso posto.
c) Il resto R (che sarà di grado 0) si ottiene moltiplicando l'ultimo coefficiente di Q(x) per c (o per –c) e addizionando il prodotto ottenuto all'ultimo coefficiente di A(x).

Questa è la regola di Ruffini.

Ad esempio sia da eseguire la seguente divisione:

$$(5x^3-6x^2+x-2):(x-2)$$

1] Si scrivono i coefficienti del dividendo tutti su una stessa riga, un po' più sotto sulla sinistra il termine c del divisore, cambiato di segno.

	5	-6	+1	-2
2				

2] Il primo coefficiente del quoziente è uguale al primo coefficiente del dividendo.

	5	-6	+1	-2
2				
	5			

3] Il secondo coefficiente del quoziente si ottiene si ottiene addizionando al secondo coefficiente del dividendo (-6) il prodotto tra -c (che è 2) e il primo coefficiente (5) del dividendo: cioè – 6+5·2=+4.

	5	-6	+1	-2
2		5·2		
	5	+4		

4] Per il terzo coefficiente si procede come nel caso precedente e così via per i termini successivi.

	5	-6	+1	-2
2		10	4·2	
	5	+4	+9	

5] il resto +16 si ottiene moltiplicando l'ultimo coefficiente del quoziente (+9) per –c (+2) ed addizionando il prodotto ottenuto all'ultimo coefficiente del dividendo.

	5	-6	+1	-2
2		10	8	+9·2
	5	+4	+9	+16

Il polinomio quoziente Q(x):

$5x^2+4x+9$

il resto R=+16.